

مفاهيم الرياضيات التطبيقية

استاتيكا

الصف الثالث الثانوى

الاحتكاك

السطوح الملساء : تنعدم قوى الاحتكاك فيها تماماً ويكون معامل الاحتكاك = صفر (وهى سطوح افتراضية)

السطوح الخشنة : تظهر فيها قوى الاحتكاك ويكون معامل الاحتكاك فيها يساوى عددًا حقيقيًا موجبًا اكبر من الصفر.

رد الفعل :

- **فى حالة السطوح الملساء : يكون رد الفعل عموديًا على سطح التماس المشترك للجسمين المتلامسين.**
- **فى حالة السطوح الخشنة : يكون رد الفعل غير معلوم الاتجاه حيث يتوقف على طبيعة السطحين المتلامسين كما يتوقف على القوى الأخرى المؤثرة على الجسم.**

قوة الاحتكاك السكونى :

تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن ويكون اتجاهها معاكس للاتجاه الذى يميل الجسم إلى الحركة فيه

وتعطى قيمتها بالمتباينة ($0 < ع \le م_س \, ر$) حيث : $م_س$ هو معامل الاحتكاك السكونى.

قوة الاحتكاك السكونى النهائى :

عندما تصل قوة **الاحتكاك السكونى إلى قيمتها العظمى يكون الجسم عندها على وشك الحركة (دون أن يتحرك) ويكون الاحتكاك عندها نهائيًا ويرمز له بالرمز ($ع_س$)**

وتكون : $ع_س = م_س \, ر$

قوة الاحتكاك الحركى :

إذا تحرك جسم على سطح خشن فإنه يخضع لقوة احتكاك حركى يكون اتجاهها عكس اتجاه حركته ، وتعطى قيمتها بالعلاقة : $ع_ك = م_ك \, ر$ حيث $م_ك$ هو معامل الاحتكاك الحركى.

ملاحظات على معامل الاحتكاك السكونى والحركى :

- **$م_س$ ، $م_ك$ يعتمد كل منهما على طبيعة الجسمين المتلامسين ، لكنه لايعتمد على مساحة السطوح المتماسة أو كتلة الجسم المتحرك.**
- **معامل الاحتكاك السكونى ($م_س$) $>$ معامل الاحتكاك الحركى ($م_ك$)**

رد الفعل المحصل ($\text{ر}'$) : هو محصلة قوة رد الفعل العمودى $\overrightarrow{\text{ر}}$ وقوة الاحتكاك النهائى $\text{ع}_{\text{س}}$

زاوية الاحتكاك : الزاوية المحصورة بين قوة رد الفعل العمودى وقوة رد الفعل المحصل.

(في حالة الاحتكاك النهائي)

العلاقة بين معامل الاحتكاك وزاوية الاحتكاك : معامل الاحتكاك = ظل زاوية الاحتكاك

العلاقة بين قياس زاوية الاحتكاك وقياس زاوية ميل المستوى على الأفقى :

إذا وُضع جسم على مستو مائل خشن وكان الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط فإن قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى.

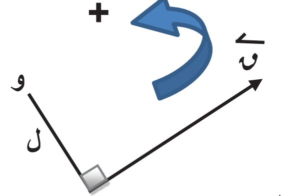
العزوم

عزم قوة بالنسبة لنقطة : يُعرف عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ المؤثرة على جسم حول النقطة (و) بأنه مقدرة القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ على احداث دوران للجسم حول نقطة (و).

ويحسب عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ من العلاقة : $\overrightarrow{\text{ج}_{\text{و}}} = \overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}}$ حيث : $\overrightarrow{\text{ر}}$ متجه موضع نقطة على خط عمل القوة بالنسبة للنقطة (و) ويكون اتجاه العزم عمودى على المستوى الذى يحوى كل من $\overrightarrow{\text{ق}}$ ، $\overrightarrow{\text{ر}}$

معيار عزم قوة بالنسبة لنقطة : إذا كان ق يمثل معيار القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ ، ل يمثل طول العمود الساقط من النقطة (و) على خط عمل القوة فإن : معيار عزم $\overrightarrow{\text{ق}}$ حول النقطة (و) يحسب من العلاقة : $\|\overrightarrow{\text{ج}_{\text{و}}}\| = \text{ق ل}$

القياس الجبرى لعزم قوة بالنسبة لنقطة :



−
و
ل
ق

إذا كانت القوة تعمل على دوران الجسم حول نقطة (و) فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة فإن القياس الجبرى لمتجه عزم القوة يكون موجبًا ، وإذا كانت القوة تعمل على دوران الجسم حول نقطة (و) مع اتجاه دوران عقارب الساعة فإن القياس الجبرى لمتجه عزم القوة يكون سالبًا.

☚ طول العمود المرسوم من نقطة (و) على خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ هو ل حيث : $\text{ل} = \dfrac{\|\overrightarrow{\text{ج}_{\text{و}}}\|}{\|\overrightarrow{\text{ق}}\|}$

- إذا تلاشى عزم قوة بالنسبة لنقطة فإن خط عمل القوة يمر بهذه النقطة.
- **مبدأ العزوم (نظرية فارينون)** عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة يساوى مجموع عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة للنقطة نفسها.
- **نظرية :** مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها.
- إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول نقطة أ = مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة ب كان خط عمل المحصلة موازيًا $\overleftrightarrow{أ ب}$
- إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول نقطة أ = − مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة ب كان خط عمل المحصلة ينصف $\overline{أ ب}$
- عزم قوة بالنسبة لنقطة فى الفراغ : $\overleftarrow{ج}_{و} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ س & ص & ع \\ ق_{س} & ق_{ص} & ق_{ع} \end{vmatrix}$

حيث : $\overleftarrow{ر}$ متجه موضع نقطة على خط عمل القوة بالنسبة لنقطة الأصل

- مركبات عزوم قوة فى اتجاه المحاور إذا كانت : $\overleftarrow{ق} = (ق_{س} ، ق_{ص} ، ق_{ع})$ قوة تؤثر فى نقطة متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل $\overleftarrow{ر} = (س ، ص ، ع)$ فإن :

$(ص ق_{ع} - ع ق_{ص})$ مركبة عزم $\overleftarrow{ق}$ فى اتجاه محور س

$(ع ق_{س} - س ق_{ع})$ مركبة عزم $\overleftarrow{ق}$ فى اتجاه محور ص

$(س ق_{ص} - ص ق_{س})$ مركبة عزم $\overleftarrow{ق}$ فى اتجاه محور ع

القوى المتوازية المستوية

محصلة قوتين متوازيتين وفى نفس الاتجاه

$\overline{ق_١} = ق_١ \overleftarrow{ى}$ ، $\overline{ق_٢} = ق_٢ \overleftarrow{ى}$ تؤثران فى ٲ ، ب فإن :

المحصلة : $\overleftarrow{ح} = \overline{ق_١} + \overline{ق_٢}$ وتؤثر فى نقطة حـ ∈ $\overline{ٲ ب}$ بحيث : ٲ حـ × $ق_١$ = ب حـ × $ق_٢$

محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين فى الاتجاه

$\overline{ق_١} = ق_١ \overleftarrow{ى}$ ، $\overline{ق_٢} = - ق_٢ \overleftarrow{ى}$ ($ق_١ > ق_٢$) تؤثران فى ٲ ، ب فإن :

المحصلة : $\overleftarrow{ح} = \overline{ق_١} + \overline{ق_٢}$ = $(ق_١ - ق_٢)\overleftarrow{ى}$ وتؤثر فى نقطة حـ ∈ $\overleftarrow{ب ٲ}$ ، حـ ∉ $\overline{ٲ ب}$

بحيث : ٲ حـ × $ق_١$ = ب حـ × $ق_٢$

عزوم القوى المتوازية المستوية

نظرية (مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المتوازية المستوية بالنسبة لنقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة)

محصلة عدة قوى متوازية

إذا كانت القوى $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ ، .... ، $\overline{ق_ن}$ متوازية وتأثر فى النقط $ٲ_١$ ، $ٲ_٢$ ، ..... ، $ٲ_ن$

فإن : محصلتها هى $\overleftarrow{ح}$ حيث : $\overleftarrow{ح} = \overline{ق_١} + \overline{ق_٢} + ... + \overline{ق_ن}$ وتؤثر فى نقطة حـ حيث :

$$ٲ_١ حـ = \frac{\| \text{مجموع عزوم القوى حول } ٲ_١ \|}{\| \overleftarrow{ح} \|}$$

اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

قاعدة : إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن :

← مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى (بالنسبة لمتجه وحدة يوازيها) يساوى صفرًا (المحصلة = صفر)

← مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستواها يساوى صفرًا

الاتزان العام

☺ إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير قوتين ، فإنه يمكن نقل نقطة تأثير أى من القوتين إلى نقطة أخرى على خط عملها دون أن يؤثر ذلك فى اتزان الجسم.

☺ إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة ، ورسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى ، فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة.

☺ إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية وغير متوازية ، فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة واحدة.

☺ شروط اتزان جسم تحت تأثير عدة قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة :

- ❖ المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ = صفر
- ❖ المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ = صفر

انعدام عزم مجموعة القوي بالنسبة لاي نقطة:

تتوازن عزوم الدوران المؤثرة علي جسم في اتجاه دوران عقارب الساعة مع عزوم الدوران في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة حتي يكون الجسم في حالة اتزان.

الشروط الكافية و اللازمة لاتزان مجموعة من القوي المستوية:

لكي تتزن مجموعة من القوي المستوية يلزم ويكفي ان تتحقق الشروط الاتية:

- ❖ ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوي في اتجاهين متعامدين واقعين في مستواها.
- ❖ ينعدم مجموع المركبات الجبرية لعزوم القوي بالنسبة لنقطة واحدة في مستواها.

ويمكن التعبير رياضياً عن هذه الشروط كالآتي:

س = صفر ، ص = صفر ج = صفر

الازدواجات

💻 تعريف الازدواج : هو نظام من القوى يتكون من قوتين متساويتان فى المعيار ومتضادتين فى الاتجاه ولا يجمعهما خط عمل واحد.

💻 عزم الازدواج : يعرف عزم الازدواج بأنه مجموع عزمى قوتى الازدواج حول أى نقطة فى الفراغ ومعياره يساوى حاصل ضرب معيار إحدى القوتين فى البُعد بينهما.

💻 نظرية : عزم الازدواج هو متجه ثابت لايعتمد على النقطة التى يُنسب إليها عزمى قوتيه.

اتزان ازدواجين : يُقال لازدواجين أنهما متزنان إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى.

اتزان جسم تحت تأثير عدة ازدواجات :

إذا أثر على الجسم عدة ازدواجات مستوية متجهات عزمها هى : $\overline{ج_١}$ ، $\overline{ج_٢}$ ، .... ، $\overline{ج_ن}$

فإن : شرط اتزان الجسم تحت تأثير هذه الازدواجات هو : $\overline{ج_١} + \overline{ج_٢} + ... + \overline{ج_ن} = \overline{و}$

تكافؤ ازدواجين: يُقال لازدواجين مستويين أنهما متكافئان إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما.

نظام القوى المستوية التى تكافئ ازدواج :

يُقال لعدة قوى مستوية $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ ، .... ، $\overline{ق_ن}$ أنها تكافئ ازدواج إذا تحقق الشرطان الآتيان معًا :

- ❖ محصلة القوى تساوى المتجه الصفرى ($\overline{ق_١} + \overline{ق_٢} + ... + \overline{ق_ن} = \overline{و}$)
- ❖ مجموع عزوم القوى حول أى نقطة فى الفراغ لاينعدم.

قاعدة (١) : إذا أثرت عدة قوى مستوية فى جسم متماسك ومثلها تمثيلًا تامًا أضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى ترتيب دورى واحد ، كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المضلع فى مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال.

تعميم: إذا أثرت عدة قوى مستوية فى جسم متماسك ومثلها تمثيلا تامًا أضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى ترتيب دورى واحد ، كانت هذه المجموعة تكافىء ازدواجُا معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المضلع فى مقدار القوة الممثل لوحدة الطوال.

قاعدة (٢) : إذا كان مجموع القياسات لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط فى مستواها ليست على استقامة واحدة يساوى مقدار ثابت لايساوى الصفر ، كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.

الازدواج المحصل : يُعرف مجموع ازدواجين مستويين $\overline{ج_١}$ ، $\overline{ج_٢}$ على أنه الازدواج الذى عزمه مجموع عزمى هذين الازدواجين حيث ($\overline{ج} = \overline{ج_١} + \overline{ج_٢}$)

مركز الثقل

❋ **مركز ثقل جسم جاسئ :** هو نقطة ثابتة فى الجسم يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات التى يتكون منها الجسم ، ولايتغير موضعها بالنسبة للجسم ، مهما تغير وضعه بالنسبة للأرض.

❋ **ملاحظات على مركز الثقل :** مركز ثقل الجسم الجاسئ يتغير بتغير شكله ، وذلك لتغير الأبعاد بين الجسيمات المكونه له.

❋ **الجسم المنتظم الكثافة :** هو الجسم الذى تكون كتلة وحدة الأطوال أو المساحات أو الحجوم المأخوذة من أى جزء منه ثابتة.

❋ **متجه موضع مركز الثقل للجسم الجاسئ بالنسبة لنقطة الأصل :**

إذا كانت : $ك_١$ ، $ك_٢$ ، $ك_٣$ ، ..... ، $ك_ن$ كتل الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ ،

$\overrightarrow{ر_١}$ ، $\overrightarrow{ر_٢}$ ، .... ، $\overrightarrow{ر_ن}$ متجهات مواضع هذه الجسيمات منسوبة إلى نقطة الأصل

فإن متجه الموضع $\overrightarrow{ر_م}$ لمركز ثقل الجسم الجاسئ منسوبًا إلى نقطة الأصل يتحدد من العلاقة :

$$\overrightarrow{ر_م} = \frac{ك_١ \overrightarrow{ر_١} + ك_٢ \overrightarrow{ر_٢} + ك_٣ \overrightarrow{ر_٣} + \cdots\cdots + ك_ن \overrightarrow{ر_ن}}{ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + \cdots\cdots + ك_ن}$$

ويُعبر عنها بدلالة مركبات مركز الثقل فى نظام الاحداثيات الديكارتية المتعامدة كالآتى :

$$س_م = \frac{ك_١ س_١ + ك_٢ س_٢ + ك_٣ س_٣ + \cdots\cdots + ك_ن س_ن}{ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + \cdots\cdots + ك_ن}$$

$$ص_م = \frac{ك_١ ص_١ + ك_٢ ص_٢ + ك_٣ ص_٣ + \cdots\cdots + ك_ن ص_ن}{ك_١ + ك_٢ + ك_٣ + \cdots\cdots + ك_ن}$$

❋ التعليق الحر للجسم الجاسئ : يقع مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقًا حرًا على الخط المستقيم الرأسى المار بنقطة التعليق.

❋ مركز ثقل قضيب رفيع منتظم : مركز ثقل قضيب رفيع منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصفه.

❋ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل متوازى أضلاع : مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بشكل متوازى الأضلاع يقع عند مركزها الهندسى (نقطة تلاقى قطرى متوازى الضلاع)

❋ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث : مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقى متوسطات هذا المثلث.

❋ طريقة الكتل السالبة : باعتبار أن كتلة الجسم الأصلى (ك) والجزء المقتطع (باعتبار أن كتلته سالبة) هو ($-$ ك$_1$) فإن كتلة الجزء المتبقى (ك $-$ ك$_1$) لذلك فإن : $\overleftarrow{ر_م}$ تُعطى بالعلاقة :

$$\overleftarrow{ر_م} = \frac{ك \, \overleftarrow{ر_م} - ك_1 \, \overleftarrow{ر_1}}{ك - ك_1}$$

ويمكن كتابة العلاقة الاتجاهية السابقة بدلالة المركبات فى اتجاه محاور الإحداثيات المتعامدة $\overleftarrow{س}$ ، و $\overleftarrow{ص}$ فتحصل على الآتى :

$$س_م = \frac{ك \, س_م - ك_1 \, س_1}{ك - ك_1} \quad ، \quad ص_م = \frac{ك \, ص_م - ك_1 \, ص_1}{ك - ك_1}$$

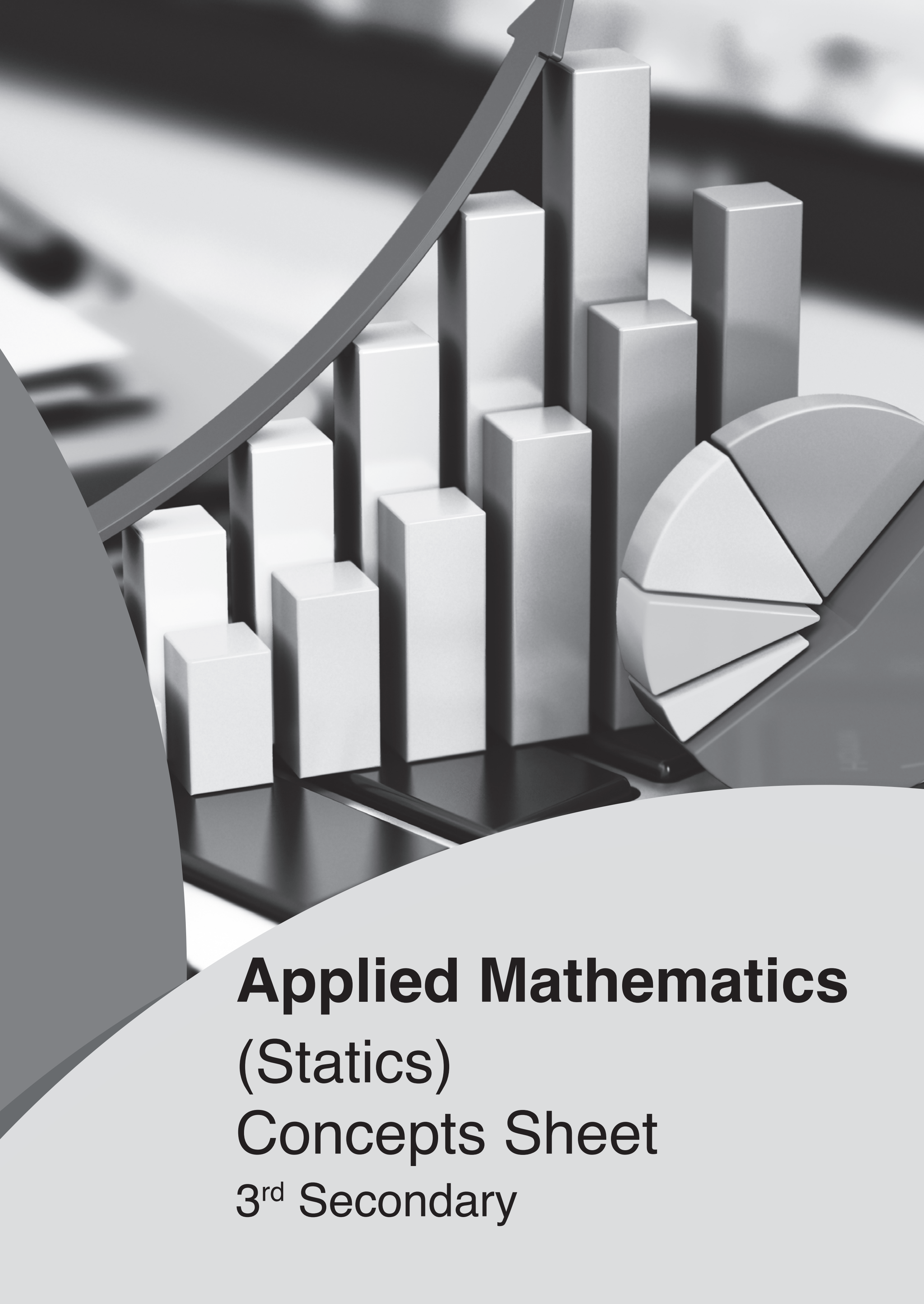
❋ تماثل صفيحة هندسية رقيقة منتظمة الكثافة : إذا وُجد محور تماثل هندسى لصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة ، فإن مركز ثقلها يقع على خط هذا المحور.

❋ تماثل مجسم هندسى منتظم الكثافة : إذا وُجد مستوى تماثل هندسى لمجسم منتظم الكثافة ، وقع مركز ثقله فى هذا المستوى.

❋ بعض الحالات الخاصة لمركز الثقل :

- مركز ثقل سلك منتظم الكثافة على هيئة دائرة يقع فى مركز الدائرة.
- مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة محدود بدائرة يقع فى مركز الدائرة.
- مركز ثقل قشرة كروية منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة.
- مركز ثقل كرة مصمتة منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة.
- مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازى مستطيلات يقع فى مركزه الهندسى.
- مركز ثقل قشرة اسطوانة دائرية قائمة منتظمة الكثافة ، يقع عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزى قاعدتيها.

- مركز ثقل اسطوانة دائرية قائمة مصمتة منتظمة الكثافة ، يقع عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزى قاعدتيها.
- مركز ثقل منشور قائم منتظم يقع عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة الموازية لأحرفه الجانبية والمارة بمركزى ثقل قاعدتيه ، باعتبارهما صفيحتين رقيقتين منتظمتى الكثافة.


Applied Mathematics
(Statics)
Concepts Sheet
3rd Secondary